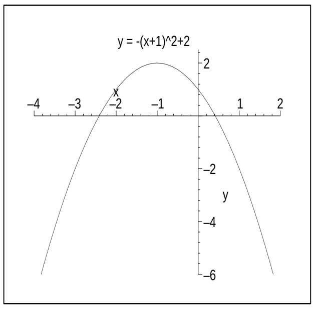
1 Funkce

1.1 Vlastnosti funkcí

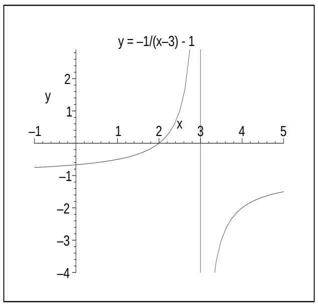
Funkce f proměnné $x \in \mathbb{R}$ je zobrazení na množině reálných čísel (reálnému číslu x je přiřazeno právě jedno reálné číslo) y.
Z grafu poznáme, zda se jedná o funkci tak, že nenajdeme **žádnou** svislou přímku, která by křivku protla dvakrát nebo víckrát. Tzn. musí ji protnout jednou nebo vůbec.

Definiční obor funkce f, značíme $\mathcal{D}(f)$, je množina všech přípustných hodnot x.
V grafu je to pohled "zleva doprava".

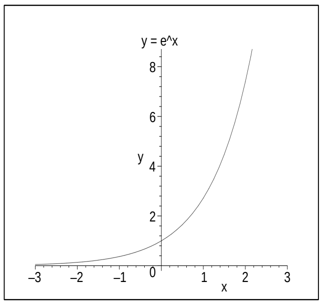
Obor hodnot funkce f, značíme $\mathcal{H}(f)$, je množina všech přípustných hodnot y.
V grafu je to pohled "zdola nahoru".



$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$
$\mathcal{H}(f) = (-\infty; 2\rangle$



$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\backslash\{3\}$
$\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$



$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$
$\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}^+$

Parita funkce f.

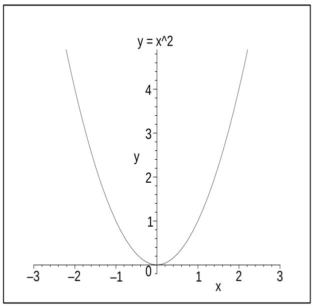
Sudá funkce: graf je souměrný podle osy y.
Definice:

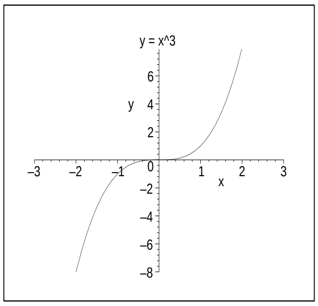
1. $\forall x \in \mathcal{D}(f)\ \exists -x \in \mathcal{D}(f)$ (souměrnost def. oboru),
2. $f(-x) = f(x)$ (stejné hodnoty).

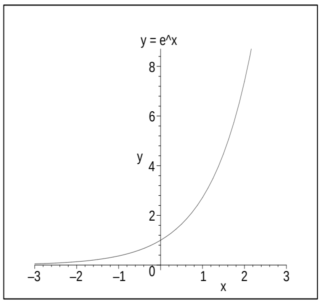
Lichá funkce: graf je souměrný podle počátku souřadného systému.
Definice:

1. $\forall x \in \mathcal{D}(f)\ \exists -x \in \mathcal{D}(f)$ (souměrnost def. oboru),
2. $f(-x) = -f(x)$ (opačné hodnoty).

Funkce, která není sudá ani lichá: předchozí podmínky nesplňuje.







sudá | lichá | není sudá ani lichá

<u>**Monotonie**</u> funkce f. Z grafu se poznává mnohem lépe než pomocí definice ($\nearrow$ roste, $\searrow$ klesá). Pokud hledáme monotonii funkce podle definic, je jednodušší si je přepsat pomocí zlomku $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, kde $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$, a porovnávat s nulou.

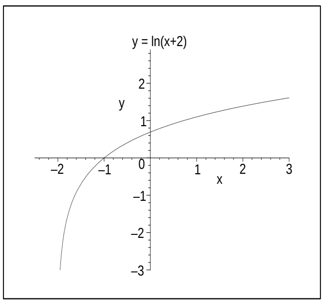
Rostoucí funkce: $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0.$

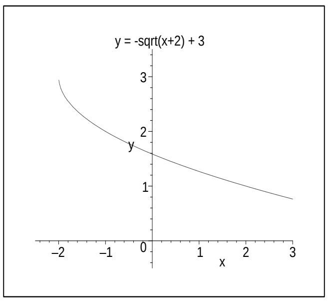
Klesající funkce: $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0.$

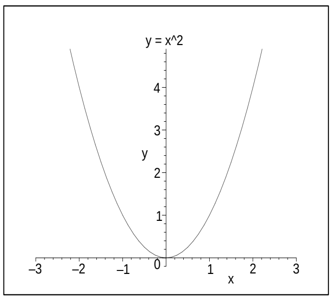
Nerostoucí funkce: $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq 0.$

Neklesající funkce: $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0.$

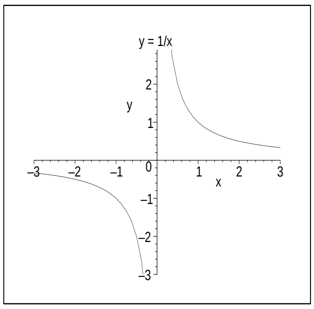
Funkce, která není rostoucí ani klesající: o znaménku zlomku nemůžeme jednoznačně rozhodnout (pro některé hodnoty je kladný, pro jiné záporný).



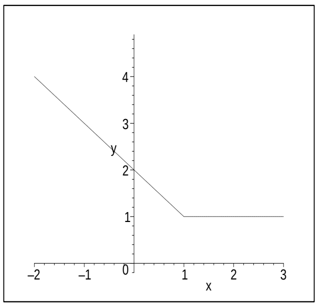




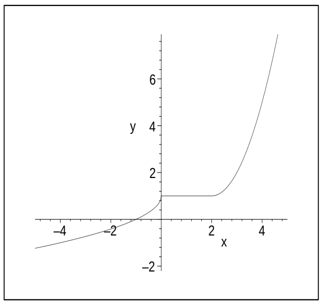
rostoucí | klesající | není rostoucí ani klesající



není rostoucí ani klesající

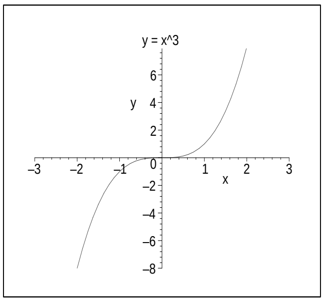


nerostoucí

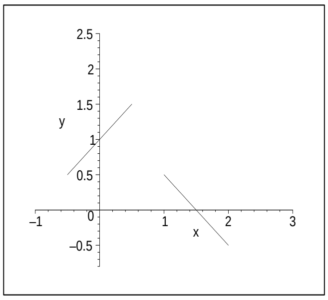


neklesající

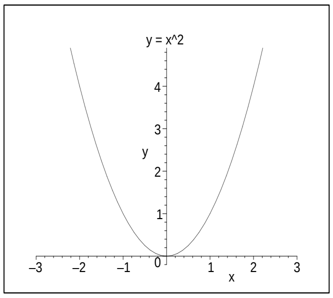
Prostost funkce f. Definice: $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f) : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (pro dvě různé hodnoty x, jsou i jejich funkční hodnoty různé).
Graficky se tato vlastnost zjišťuje pomocí horizontální přímky tak, že pokud najdeme nějakou vodorovnou přímku, která by graf protla dvakrát nebo vícekrát, tak tato funkce není prostá. Tzn. libovolná vodorovná přímka může protnout graf prosté funkce jednou nebo ani jednou.



prostá



prostá



není prostá

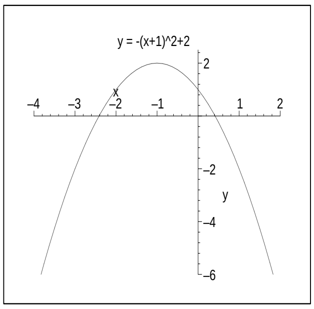
Omezenost funkce f.

Shora omezená funkce: $\exists h \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathcal{D}(f) : f(x) \leq h$ (všechny funkční hodnoty jsou menší nebo rovny horní hranici h).

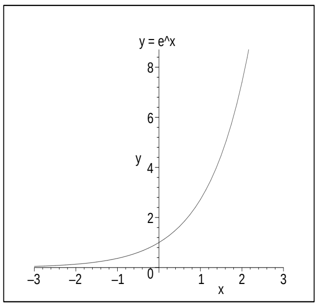
Zdola omezená funkce: $\exists d \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathcal{D}(f) : f(x) \geq h$ (všechny funkční hodnoty jsou větší nebo rovny dolní hranici d).

Omezená funkce: funkce je zároveň omezená shora i zdola.

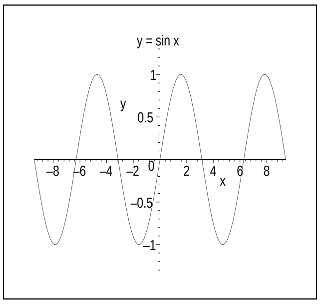
Neomezená funkce: ostatní případy.



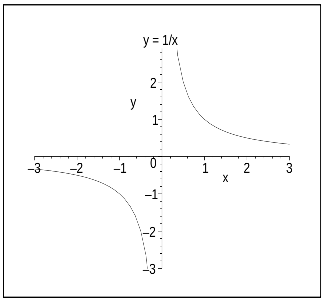
omezená shora hodnotou 2



omezená zdola hodnotou 0



omezená hodnotami ± 1

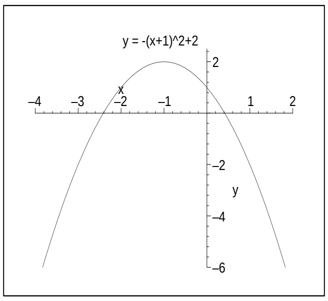


neomezená

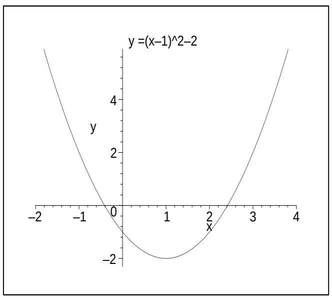
Extrémy funkce f.

Maximum funkce f v bodu a – $\forall x \in \mathcal{D}(f) : f(x) \leq f(a)$ (všechny funkční hodnoty jsou menší nebo rovny největší funkční hodnotě $f(a)$ v bodu a).

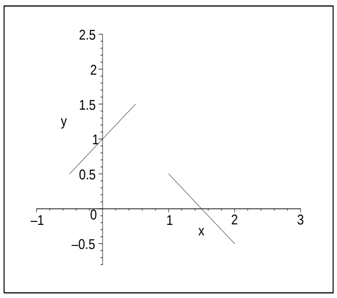
Minimum funkce f v bodu b – $\forall x \in \mathcal{D}(f) : f(b) \leq f(x)$ (všechny funkční hodnoty jsou větší nebo rovny nejmenší funkční hodnotě $f(b)$ v bodu b).



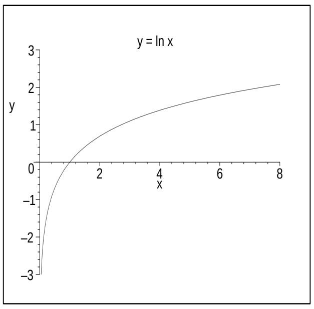
maximum $[-1; 2]$
minimum nemá



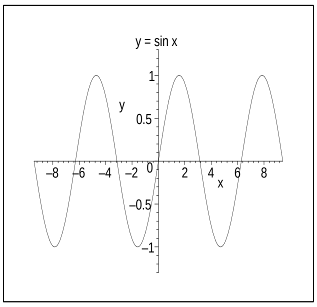
maximum nemá
minimum $[1; -2]$



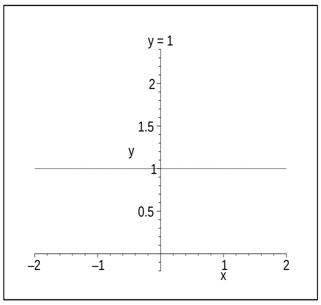
maximum $[0,5; 1,5]$
minimum $[2; -0,5]$



maximum nemá
minimum nemá



maximum $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; 1]$
minimum $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; 1]$
$k \in \mathbb{Z}$



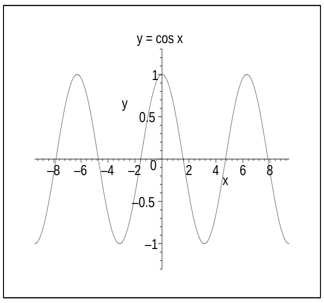
maximum $[x; 1]$
minimum $[x; 1]$
$x \in \mathbb{R}$

Periodicita funkce f. Říkáme, že funkce f je periodická s periodou $p \in \mathbb{R}^+$, jestliže $\forall k \in \mathbb{Z}$ současně platí:

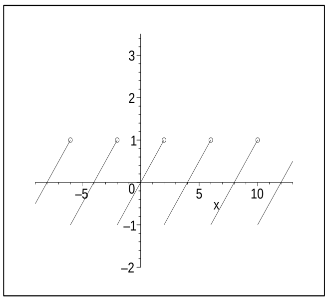
1. $\forall x \in \mathcal{D}(f) \Rightarrow (x + k \cdot p) \in \mathcal{D}(f)$ (hodnoty x i hodnoty, k níž přičteme celočíselné násobky periody, jsou z definičního oboru),
2. $\forall x \in \mathcal{D}(f) \Rightarrow f(x + kp) = f(x)$ (stejné funkční hodnoty).

p je podle definice sice jakákoli perioda (tzn. pro funkci $y = \sin x$ je např. $p = 8\pi$) , ale v matematice tímto písmenem označujeme spíše nejmenší periodu (tzn. $p = 2\pi$).

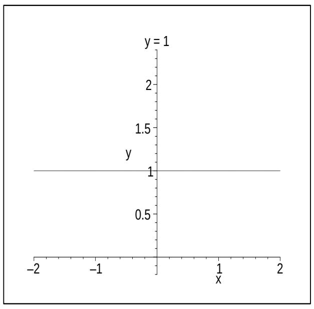
Periodické funkce jsou např. všechny goniometrické funkce nebo konstantní funkce (ty nemají nejmenší periodu).

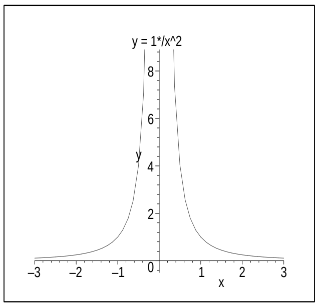


periodická
$p = 2\pi$



periodická
$p = 4$





periodická
nejm. p neexistuje

není periodická

Příklady:

Slovně vypisovat všechny vlastnosti funkcí nebudeme, použijeme proto následující zkratky:

S – sudá funkce, L – lichá funkce

R – rostoucí funkce, K – klesající funkce

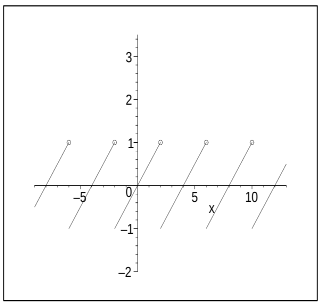
P – prostá funkce

om – omezená funkce

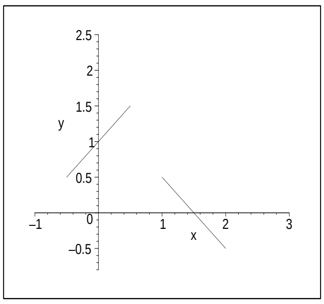
max – maximum funkce, min – minimum funkce.

Určete o jaký typ funkce se jedná, její předpis a popište všechny vlastnosti následujících funkcí:

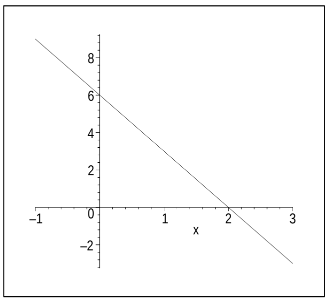
(a)



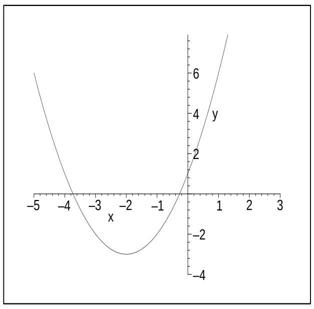
(b)



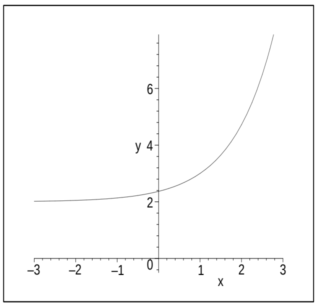
(c)



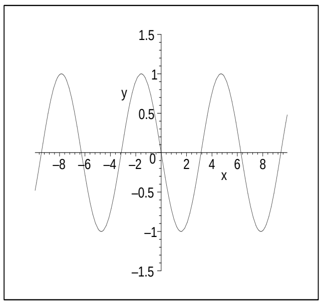
(d)



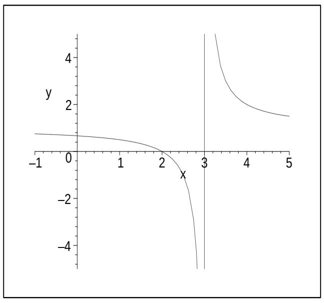
(e)



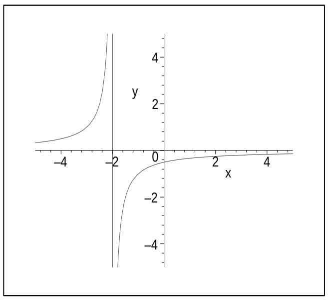
(f)



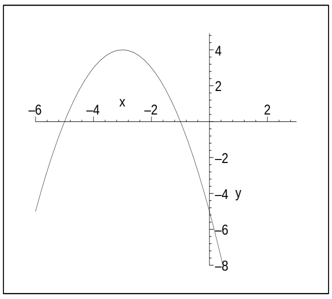
(g)



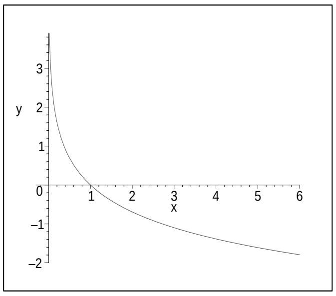
(h)



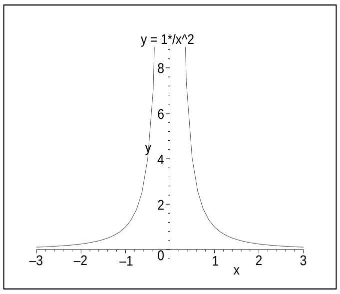
(i)



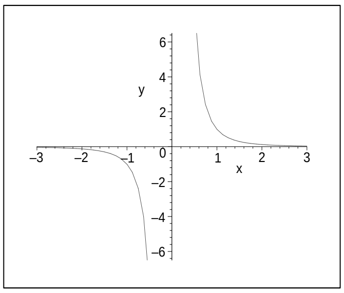
(j)



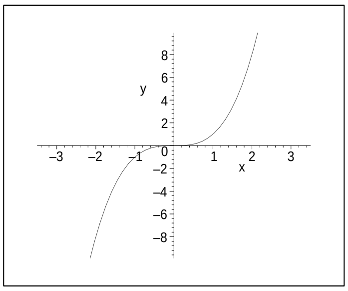
(k)



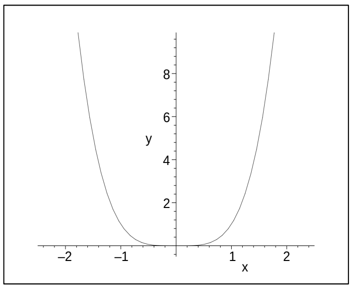
(l)



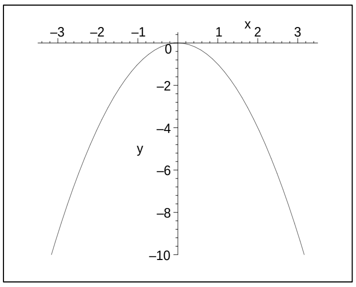
(m)



(n)



(o)



(a) *složeno z lin. fcí,* $y = 0,5x + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \langle -1; 1)$, *L, ani R ani K, není P, om č.* ± 1, *max* $[0,5; 1,5]$, *min* $[2, -0,5]$, *není period.,*

(b) *složeno z lin. fcí,* $y = x + 1$, $y = -x + 1,5$, $\mathcal{D}(f) = \langle -0,5; 0,5\rangle \cup \langle 1,2\rangle$, $\mathcal{H}(f) = \langle -0,5; 1,5\rangle$, *ani S ani L, ani R ani K, není P, om č.* $-0,5; 1,5$, *max* $[0,5; 1,5]$, *min* $[2; -0,5]$,*není period.,*

(c) *lineární fce* $y = -3x + 6$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *ani S ani L, K, P, neom , max nemá, min nemá, není period.,*

(d) *kvadratická fce* $y = (x + 2)^2 - 3$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \langle -3; \infty)$, *ani S ani L, ani R ani K, není P, om zdola č.* -3, *max nemá, min* $[-2; -3]$, *není period.,*

(e) *exponenciální fce* $y = e^{x-1} + 2$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = (2; \infty)$, *ani S ani L, R, P, om zdola č.* 2, *max nemá, min nemá, není period.,*

(f) *goniometrická fce* $y = -\sin x = \sin(x + \pi)$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \langle -1; 1\rangle$, *L, ani R ani K, P, om č.* ± 1, *max* $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi]$, *min* $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi]$,$k \in \mathbb{R}$, *period.* $p = 2\pi$,

(g) *lineárně lomená fce* $y = \frac{1}{x-3} + 1$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, *ani S ani L, ani R ani K, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*

(h) *lineárně lomená fce* $y = -\frac{1}{x+2}$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *ani S ani L, ani R ani K, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*

(i) *kvadratická fce* $y = -(x + 3)^2 + 4$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = (-\infty; 4\rangle$, *ani S ani L, ani R ani K, není P, om shora č.* 4, *max* $[-3; 4]$, *min nemá, není period.,*

(j) *logaritmická fce* $y = -\ln x$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}^+$, *ani S ani L, K, P, neom , max nemá, min nemá, není period.,*

(k) *mocninná fce* $y = \frac{1}{x^2}$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}^+$, *S, ani R ani K, není P, om zdola č.* 0, *max nemá, min nemá, není period.,*

(l) *mocninná fce* $y = \frac{1}{x^3}$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *L, ani R ani K, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*

(m) *mocninná fce (kubická)* $y = x^3$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *L, R, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*

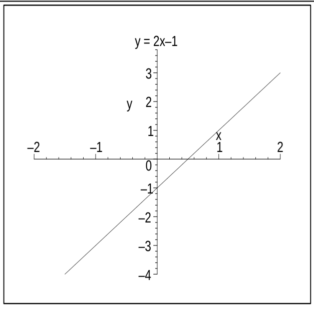
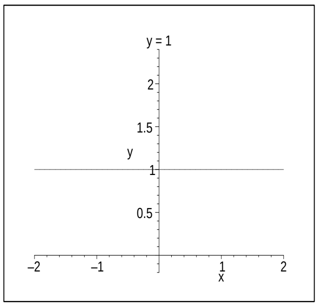
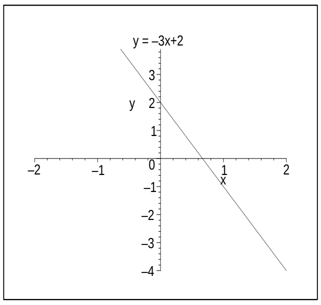
(n) *mocninná fce* $y = x^4$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \langle 0; \infty)$, *S, ani R ani K, není P, om zdola č.* 0, *max nemá, min* $[0; 0]$, *není period.,*

(o) *kvadratická fce* $y = -x^2$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = (-\infty; 0\rangle$, *S, ani R ani K, není P, om zdola č.* 0, *max* $[03; 0]$, *min nemá, není period.,*

1.2 Lineární funkce

Předpis: $\boxed{y = kx + q}$; $k, q \in \mathbb{R}$.
Graf: přímka.

Speciální případ: $k = 0$, tzn. $\boxed{y = q}$ – **konstantní funkce**, jejíž graf je přímka rovnoběžná s osou x, která prochází hodnotou q na ose y.

$k < 0$ $(y = 2x - 1)$	$k = 0$ obr.: $y = 1$	$k > 0$ graf $y = -3x + 2$
		
$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$ není sudá ani lichá rostoucí prostá neomezená extrémy nemá není periodická	$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ $\mathcal{H}(f) = q$ sudá není rostoucí ani klesající není prostá omezená všechny body: max i min periodická	$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$ není sudá ani lichá klesající prostá neomezená extrémy nemá není periodická

Příklady:

1. Nakreslete následující funkce a určete jejich vlastnosti:
   (a) $y = x$,
   (b) $y = -x$,
   (c) $y = 3x$,
   (d) $y = \frac{1}{2}x$,
   (e) $y = 2x - 1$,
   (f) $y = -x + 3$,
   (g) $y = -4x$,

(h) $y = 0,3x - 1$,

(i) $y = 5$,

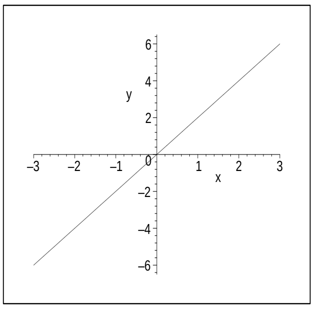
(j) $y = \frac{x+1}{x+1}$,

(k) $y = \frac{x^2-x-6}{x+2}$,

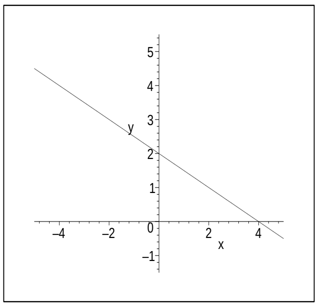
(l) $y = \frac{x^2-1}{x-1}$.

2. Určete předpis a vlastnosti následujících funkcí:

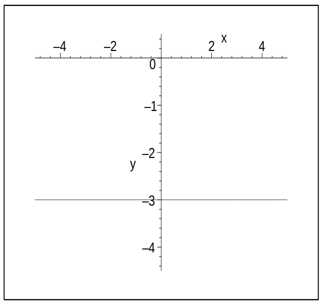
(a)



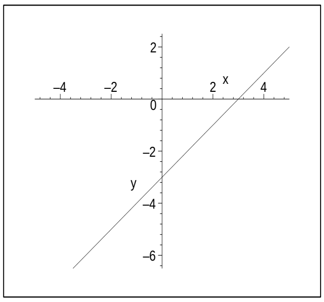
(b)



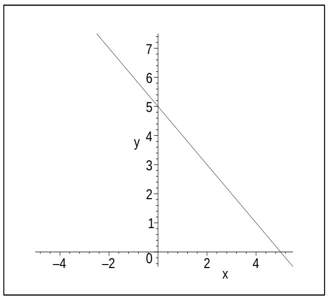
(c)



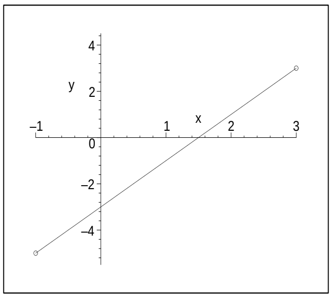
(d)



(e)



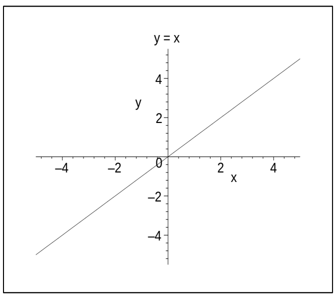
(f)



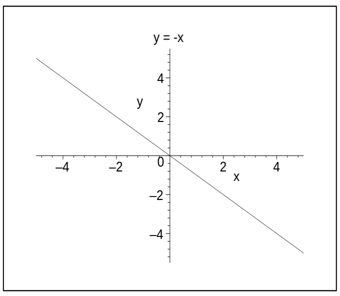
3. Určete předpis funkce, která je zároveň sudá i lichá. Nakreslete její graf.

Výsledky:

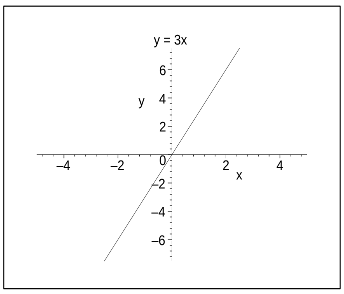
1a)



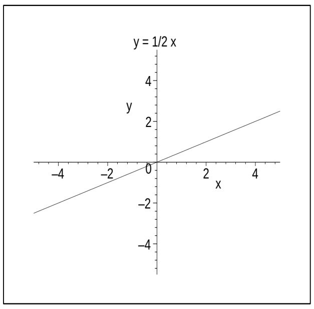
1b)



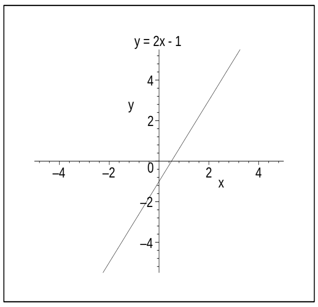
1c)



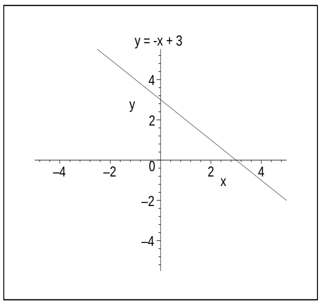
1d)



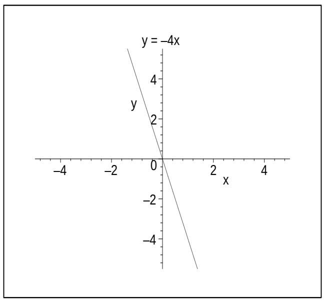
1e)



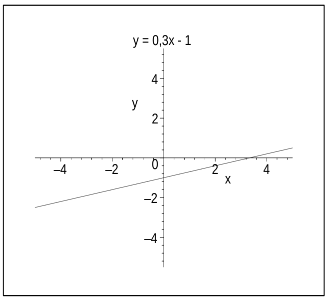
1f)



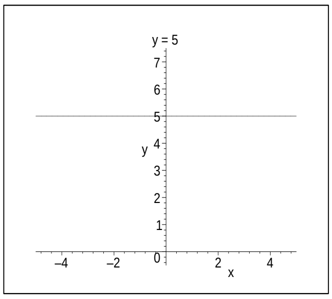
1g)



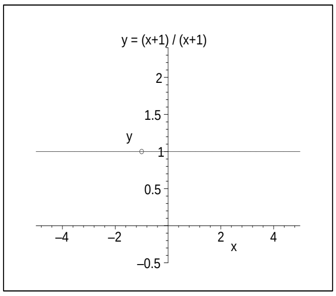
1h)



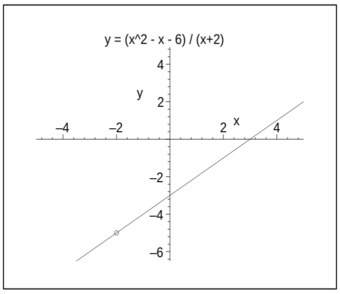
1i)



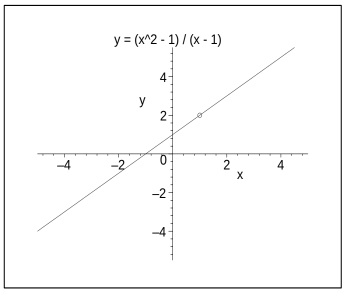
1j)



1k)



1l)



1. (a) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *L, R, P, neom, max nemá, min nemá,není period.,*
   (b) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *L, K, P, neom, max nemá, min nemá,není period.,*
   (c) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *L, R, P, neom, max nemá, min nemá,není period.,*
   (d) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *L, R, P, neom, max nemá, min nemá,není period.,*
   (e) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *ani S ani L, R, P, neom, max nemá, min nemá,není period.,*
   (f) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *ani S ani L, K, P, neom, max nemá, min nemá,není period.,*

(g) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *L, K, P, neom, max nemá, min nemá,není period.,*

(h) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *ani S ani L, R, P, neom, max nemá, min nemá,není period.,*

(i) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \{5\}$, *S, ani R ani K, není P, om č. 5, max* $[x, 5]$, *min* $[x, 5], x \in \mathbb{R}$, *period. bez nejm. periody,*

(j) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\mathcal{H}(f) = \{5\}$, *ani S ani L, ani R ani K, není P, om č. 1, max* $[x, 1]$, *min* $[x, 1], x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,*není period.,*

(k) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$, *ani S ani L, R, P, neom, max nemá, min nemá,není period.,*

(l) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, *ani S ani L, R, P, neom, max nemá, min nemá,není period.,*

2. (a) $y = 2x$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *L, R, P, neom, max nemá, min nemá,není period.,*

   (b) $y = -\frac{1}{2}x + 2$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *ani S ani L, K, P, neom, max nemá, min nemá,není period.,*

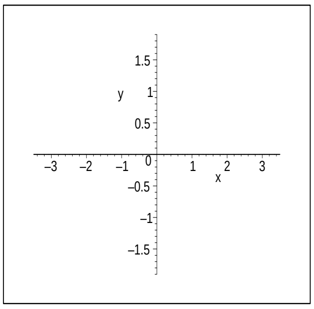
   (c) $y = -3$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \{-3\}$, *S, ani R ani K, není P, om č.* -3, *max* $[x; -3]$, *min* $[x; -3]$, $x \in \mathbb{R}$, *period. bez nejm. periody,*

   (d) $y = x - 3$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *ani S ani L, R, P, neom, max nemá, min nemá,není period.,*

   (e) $y = -x + 5$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *ani S ani L, K, P, neom, max nemá, min nemá,není period.,*

   (f) $y = 2x - 3$, $\mathcal{D}(f) = (-1; 3)$, $\mathcal{H}(f) = (-5; 3)$, *ani S ani L, R, P, om č.* $-5, 3$, *max nemá, min nemá,není period..*

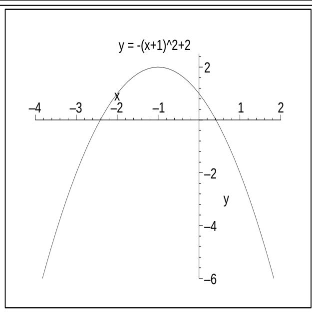
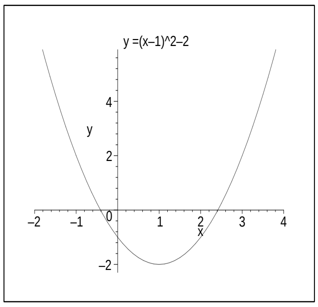
3. $y = 0$.



1.3 Kvadratické funkce

Předpis: $\boxed{y = ax^2 + bx + c}$; $a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ – obecná rovnice.
$\boxed{y = a(x - v_1)^2 + v_2}$; vrchol $V[v_1; v_2]$ – vrcholová rovnice.
Graf: parabola.

Vrchol paraboly můžeme určit ze vzorce $V = \left[-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2}{4a} + c\right]$. Většinou se ale určuje metodou "převedení na čtverec".

$a < 0$	$a > 0$
	
$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$	$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$
$\mathcal{H}(f) = (-\infty; -\frac{b^2}{4a} + c\rangle$	$\mathcal{H}(f) = \langle -\frac{b^2}{4a} + c; \infty)$
není sudá ani lichá	není sudá ani lichá
není rostoucí ani klesající	není rostoucí ani klesající
není prostá	není prostá
omezená shora	omezená zdola
maximum v $-\frac{b}{2a}$	minimum v $-\frac{b}{2a}$
není periodická	není periodická

Příklady:

1. Nakreslete následující funkce a určete jejich vlastnosti:

   (a) $y = x^2$,

   (b) $y = -x^2$,

   (c) $y = 2x^2$,

   (d) $y = \frac{1}{2}x^2$,

   (e) $y = x^2 - 1$,

   (f) $y = -x^2 + 2$,

   (g) $y = (x + 1)^2$,

(h) $y = (x-3)^2$,

(i) $y = -(x+2)^2$,

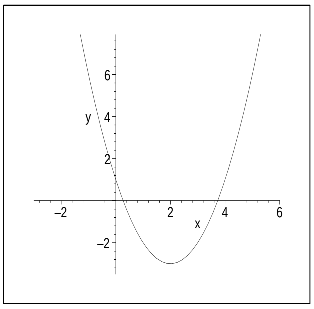
(j) $y = (x-1)^2 + 3$,

(k) $y = (x+3)^2 - 2$,

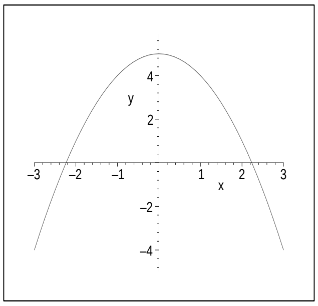
(l) $y = -(x+2)^2 - 1$.

2. Určete předpis a vlastnosti následujících funkcí:

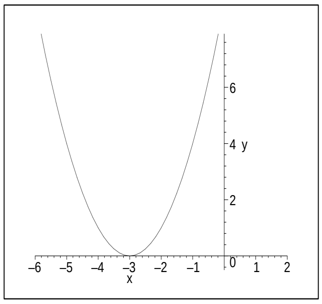
(a)



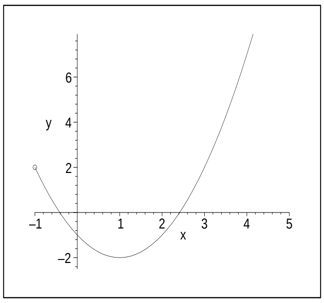
(b)



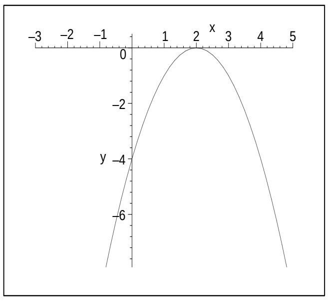
(c)



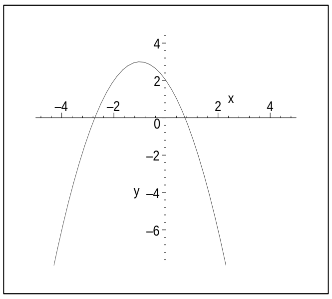
(d)



(e)

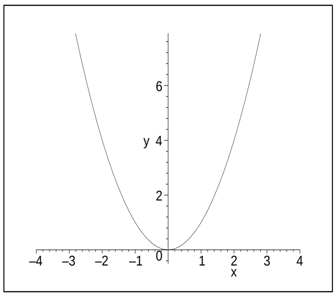


(f)

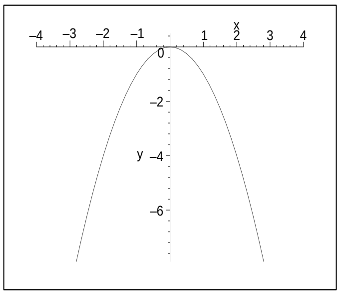


Výsledky:

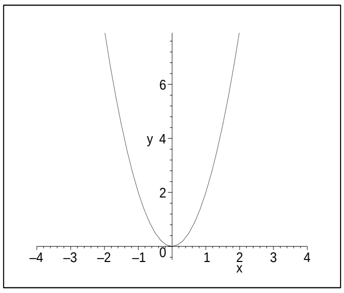
1a)



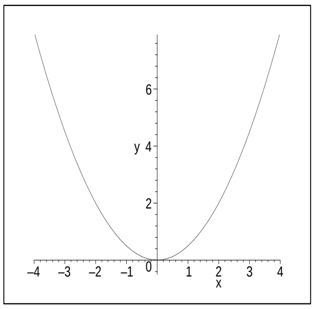
1b)



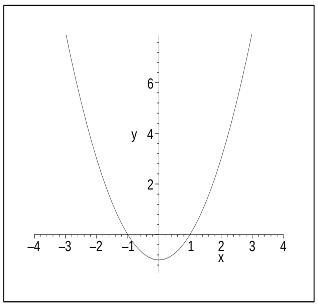
1c)



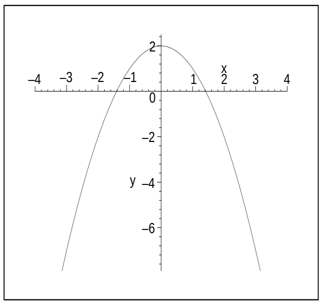
1d)



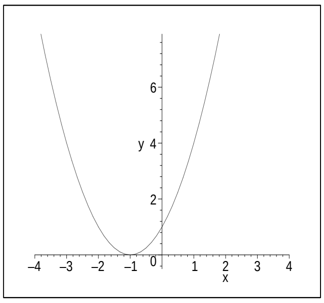
1e)



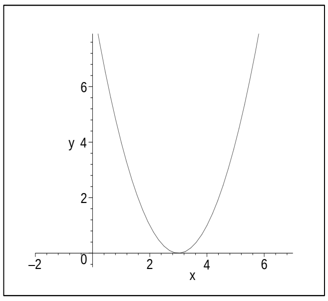
1f)



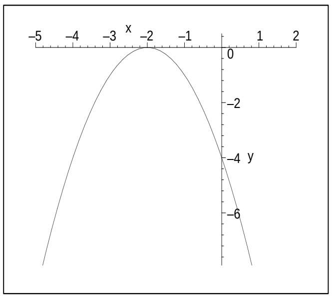
1g)



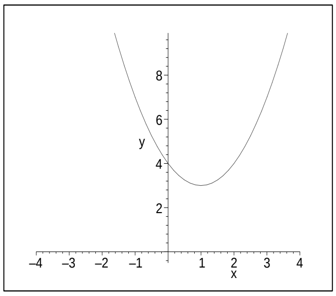
1h)



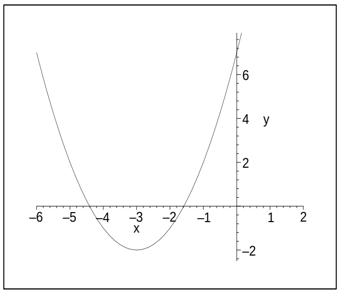
1i)



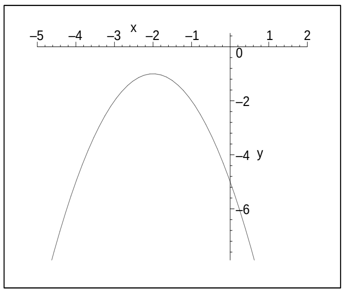
1j)



1k)



1l)



1. (a) *$\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f)=\langle 0;\infty)$, S, ani R ani K, není P, om zdola č. 0, max nemá, min $[0;0]$, není period.,*
   (b) *$\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f)=(-\infty,0\rangle$, S, ani R ani K, není P, om shora č. 0, max $[0;0]$, min nemá, není period.,*
   (c) *$\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f)=\langle 0;\infty)$, S, ani R ani K, není P, om zdola č. 0, max nemá, min $[0;0]$, není period.,*
   (d) *$\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f)=\langle 0;\infty)$, S, ani R ani K, není P, om zdola č. 0, max nemá, min $[0;0]$, není period.,*
   (e) *$\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f)=\langle -1;\infty)$, S, ani R ani K, není P, om zdola č. -1, max nemá, min $[0;-1]$, není period.,*
   (f) *$\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f)=(-\infty,2\rangle$, S, ani R ani K, není P, om shora č. 2, max $[0;2]$, min nemá, není period.,*

(g) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \langle 0; \infty)$, *ani S ani L, ani R ani K, není P, om zdola č. 0, max nemá, min* $[-1; 0]$, *není period.,*

(h) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \langle 0; \infty)$, *ani S ani L, ani R ani K, není P, om zdola č. 0, max nemá, min* $[3; 0]$, *není period.,*

(i) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = (-\infty, 0\rangle$, *ani S ani L, ani R ani K, není P, om shora č. 0, max* $[-2; 0]$, *min nemá, není period.,*

(j) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \langle 3; \infty)$, *ani S ani L, ani R ani K, není P, om zdola č. 3, max nemá, min* $[1; 3]$, *není period.,*

(k) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \langle -2; \infty)$, *ani S ani L, ani R ani K, není P, om zdola č.* -2, *max nemá, min* $[-3; -2]$, *není period.,*

(l) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = (-\infty, -1\rangle$, *ani S ani L, ani R ani K, není P, om shora č.* -1, *max* $[-2; -1]$, *min nemá, není period..*

2. (a) $y = (x-2)^2 - 3$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \langle -3; \infty)$, *ani S ani L, ani R ani K, není P, om zdola č.* -3, *max nemá, min* $[2; -3]$, *není period.,*

   (b) $y = -x^2 + 5$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = (-\infty, 5\rangle$, *S, ani R ani K, není P, om shora č.* 5, *max* $[0; 5]$, *min nemá, není period.,*

   (c) $y = (x+3)^2$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \langle 0; \infty)$, *ani S ani L, ani R ani K, není P, om zdola č.* 0, *max nemá, min* $[-3; 0]$, *není period.,*

   (d) $y = (x-1)^2 - 2$, $\mathcal{D}(f) = (-1; \infty)$, $\mathcal{H}(f) = \langle -2; \infty)$, *ani S ani L, ani R ani K, není P, om zdola č.* -2, *max nemá, min* $[1; -2]$, *není period.,*

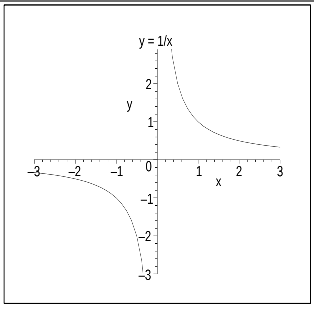
   (e) $y = -(x-2)^2$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = (-\infty, 0\rangle$, *ani S ani L, ani R ani K, není P, om shora č.* 0, *max* $[2; 0]$, *min nemá, není period.,*

   (f) $y = -(x+1)^2 + 3$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = (-\infty, 3\rangle$, *ani S ani L, ani R ani K, není P, om shora č.* 3, *max* $[-1; 3]$, *min nemá, není period..*

1.4 Lineárně lomené funkce

Předpis: $\boxed{y = \dfrac{ax+b}{cx+d}}$; $a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad \neq bc$ (tzn. nezkrátí se ani nebude nulový jmenovatel).
Graf: hyperbola.

$y = \frac{1}{x}$ *(základní)*



$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
lichá
není rostoucí ani klesající
prostá
neomezená
extrémy nemá
není periodická

Příklady:

1. Nakreslete následující funkce a určete jejich vlastnosti:
   (a) $y = \frac{1}{x}$,
   (b) $y = -\frac{1}{x}$,
   (c) $y = \frac{5}{x}$,
   (d) $y = \frac{1}{5x}$,
   (e) $y = \frac{1}{x+2}$,
   (f) $y = \frac{1}{x} + 2$,
   (g) $y = -\frac{1}{x-3}$,
   (h) $y = \frac{1}{x+1} - 3$,

(i) $y = 2 - \frac{1}{x}$,

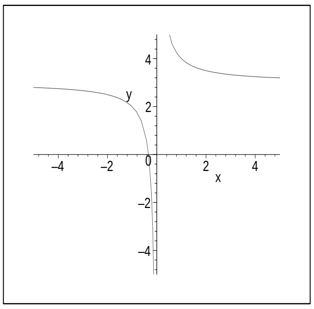
(j) $y = \frac{2}{x-1} + 3$,

(k) $y = \frac{1}{x+3} - 2$,

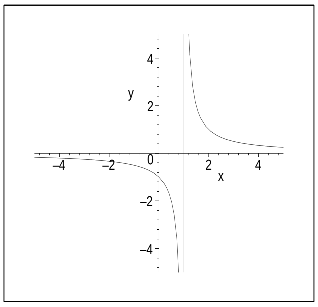
(l) $y = \frac{1}{x-2} - 1$.

2. Určete předpis a vlastnosti následujících funkcí:

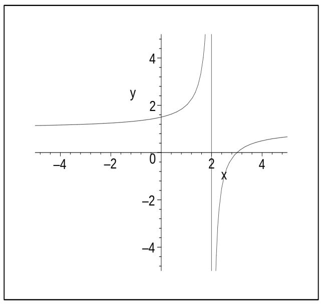
(a)



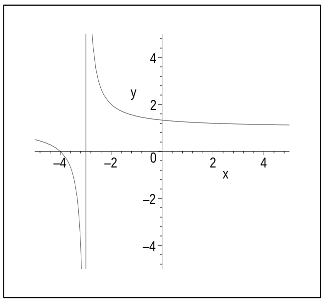
(b)



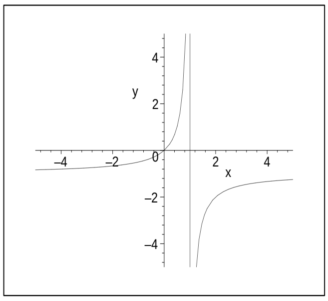
(c)



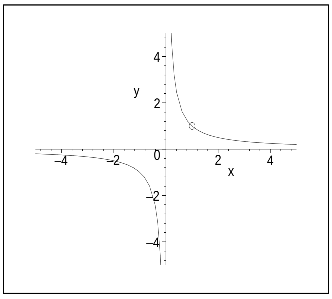
(d)



(e)

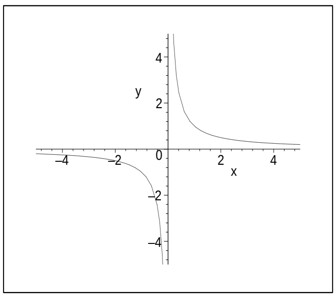


(f)

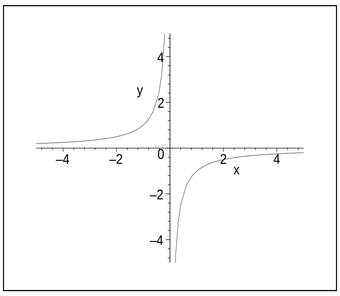


Výsledky:

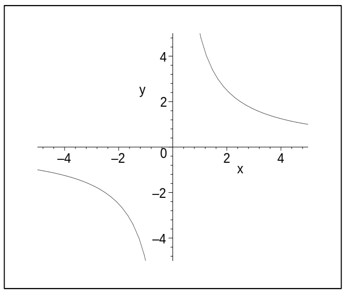
1a)



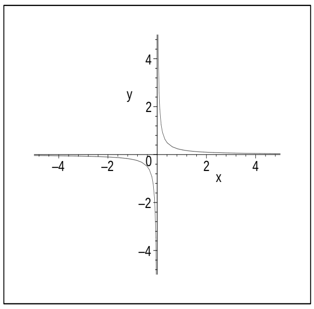
1b)



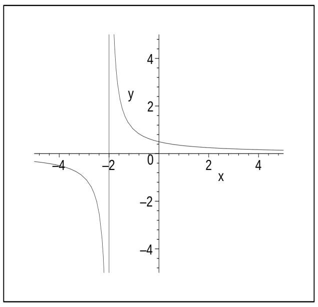
1c)



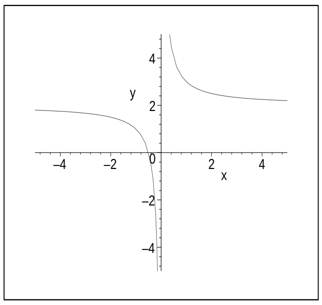
1d)



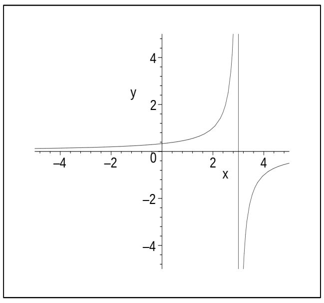
1e)



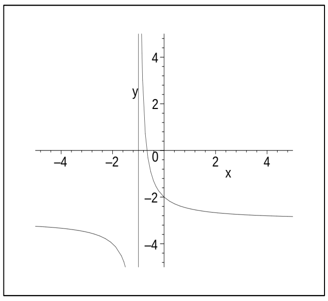
1f)



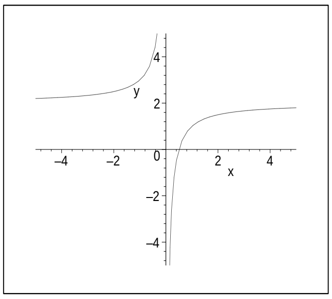
1g)



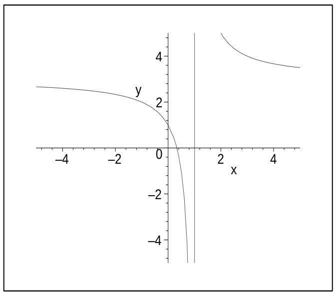
1h)



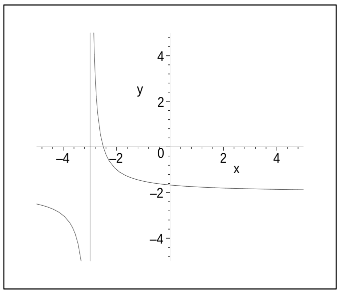
1i)



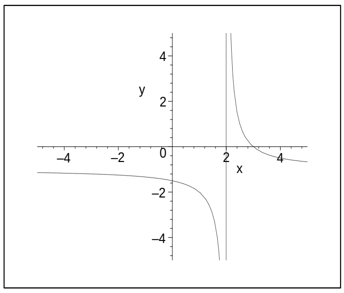
1j)



1k)



1l)



1. (a) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *L, ani R ani K, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*
   (b) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *L, ani R ani K, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*
   (c) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *L, ani R ani K, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*
   (d) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *L, ani R ani K, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*
   (e) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *ani S ani L, ani R ani K, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*
   (f) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, *ani S ani L, ani R ani K, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*

(g) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *ani S ani L, ani R ani K, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*

(h) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, *ani S ani L, ani R ani K, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*

(i) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, *ani S ani L, ani R ani K, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*

(j) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, *ani S ani L, ani R ani K, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*

(k) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, *ani S ani L, ani R ani K, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*

(l) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, *ani S ani L, ani R ani K, P, neom, max nemá, min nemá, není period..*

2. (a) $y = \frac{1}{x} + 3$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, *ani S ani L, ani R ani K, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*

   (b) $y = \frac{1}{x-1}$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *ani S ani L, ani R ani K, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*

   (c) $y = \frac{1}{x-2} + 1$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, *ani S ani L, ani R ani K, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*

   (d) $y = \frac{1}{x+3} + 1$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, *ani S ani L, ani R ani K, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*

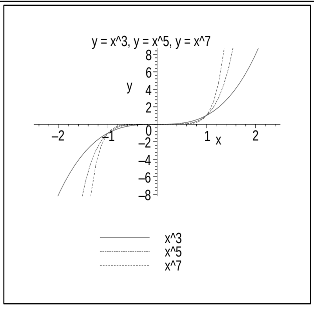
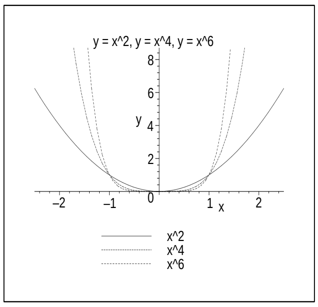
   (e) $y = -\frac{1}{x-1} - 1$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, *ani S ani L, ani R ani K, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*

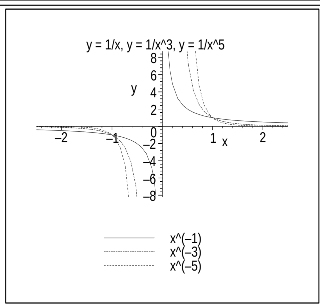
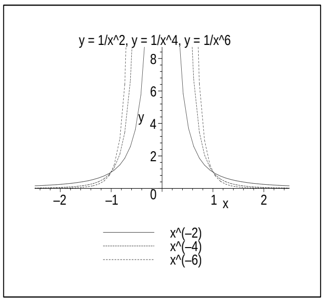
   (f) $y = \frac{x-1}{x(x-1)}$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$, *ani S ani L, ani R ani K, P, neom, max nemá, min nemá, není period..*

1.5 Mocninné funkce

Předpis: $\boxed{y = x^n}$; $n \in \mathbb{Z}$.
Graf: parabola ($n \in \mathbb{Z}^+$), hyperbola($n \in \mathbb{Z}^-$).

Speciální případy:
$y = 1$ ($= x^0$) – konstantní funkce,
$y = x$ ($= x^1$) – lineární funkce,
$y = x^2$ – kvadratická funkce,
$y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ – lineárně lomená funkce.

$n \in \mathbb{Z}^+$, liché	$n \in \mathbb{Z}^+$, sudé
	
$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$ lichá rostoucí prostá neomezená extrémy nemá není periodická	$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ $\mathcal{H}(f) = \langle 0; \infty)$ sudá není rostoucí ani klesající není prostá omezená zdola minimum v 0 není periodická

$n \in \mathbb{Z}^-$, liché	$n \in \mathbb{Z}^-$, sudé
	
$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ lichá není rostoucí ani klesající prostá neomezená extrémy nemá není periodická	$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\mathcal{H}(f) = (0; \infty)$ sudá není rostoucí ani klesající není prostá omezená zdola extrémy nemá není periodická

Příklady:

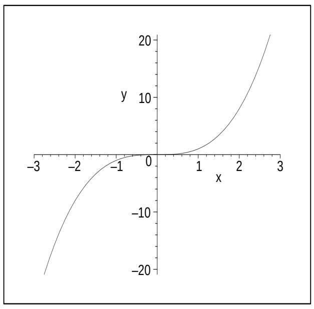
Nakreslete následující funkce a určete jejich vlastnosti:

1. $y = x^3$,

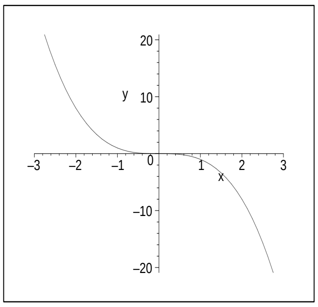
2. $y = -x^3$,
3. $y = x^4$,
4. $y = x^5$,
5. $y = x^6$,
6. $y = x^{-2}$,
7. $y = x^{-3}$,
8. $y = x^{-4}$,
9. $y = x^{-5}$.

Výsledky:

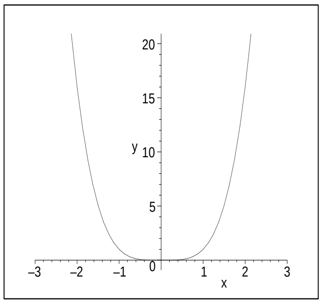
1a)



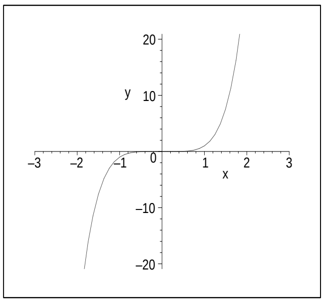
1b)



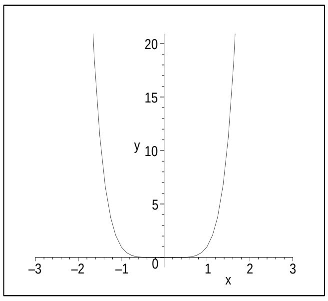
1c)



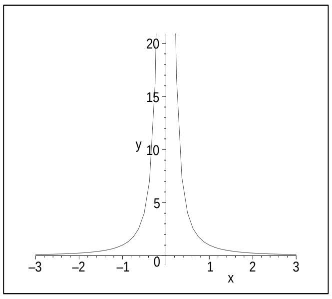
1d)



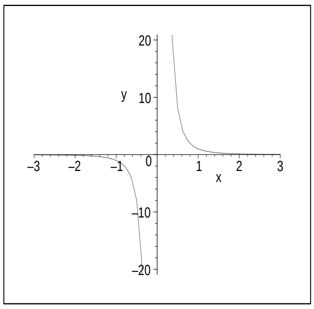
1e)



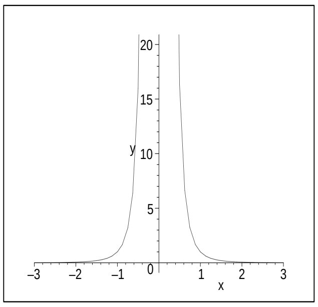
1f)

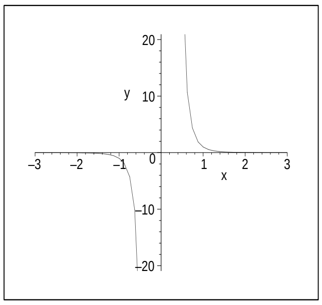


1g)



1h)



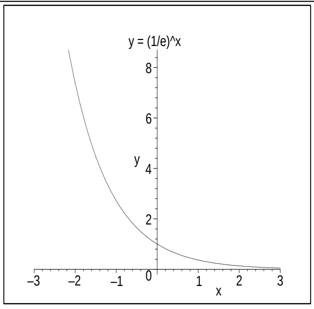
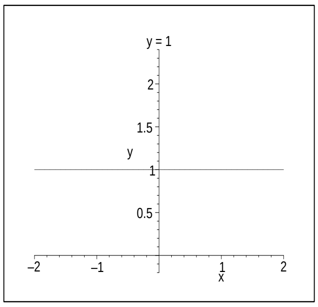
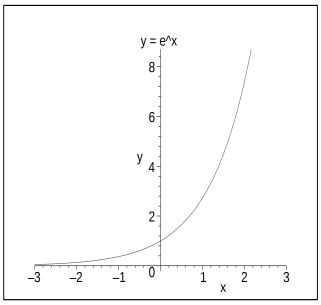


1. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, L, R, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,
2. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, L, K, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,
3. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \langle 0; \infty)$, S, ani R ani K, není P, om zdola č. 0, max nemá, min [0; 0], není period.,
4. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, L, R, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,
5. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \langle 0; \infty)$, S, ani R ani K, není P, om zdola č. 0, max nemá, min [0; 0], není period.,
6. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}^+$, S, ani R ani K, není P, om zdola č. 0, max nemá, min nemá, není period.,
7. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, L, ani R ani K, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,
8. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}^+$, S, ani R ani K, není P, om zdola č. 0, max nemá, min nemá, není period.,
9. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, L, ani R ani K, P, neom, max nemá, min nemá, není period..

1.6 Exponenciální funkce

Předpis: $\boxed{y = a^x}$; $a \in \mathbb{R}^+$.
Graf: exponenciální křivka.

Speciální případ: $a = 1$: $y = 1^x = 1$ – konstantní funkce

<table>
<tr><th>$a \in (0;1)$</th><th>$a = 1$</th><th>$a > 1$</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$
$\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}^+$
není sudá ani lichá
klesající
prostá
omezená zdola
extrémy nemá
není periodická</td><td>$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$
$\mathcal{H}(f) = \{1\}$
není sudá ani lichá
není rostoucí ani klesající
není prostá
omezená
všechny body: max i min
periodická</td><td>$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$
$\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}^+$
není sudá ani lichá
rostoucí
prostá
omezená zdola
extrémy nemá
není periodická</td></tr>
</table>

Příklady:

1. Do jednoho obrázku nakreslete všechny následující funkce:
   (a) $y = 2^x$, $y = e^x$, $y = 10^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$,
   (b) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = -e^x$.

2. Nakreslete následující funkce a určete jejich vlastnosti:
   (a) $y = e^{x-2}$,
   (b) $y = e^x - 2$,
   (c) $y = -e^x - 2$,
   (d) $y = e^{-x} - 2$,

(e) $y = e^{x+1} - 3$,

(f) $y = e^{x-1} + 2$,

(g) $y = 1 - e^{x}$,

(h) $y = 1 - e^{x+3}$,

(i) $y = 2^{x-3} + 1$,

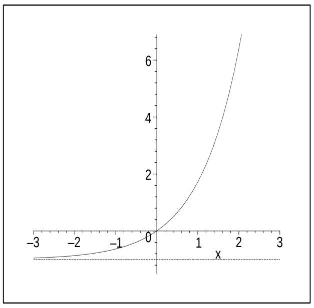
(j) $y = \left(\frac{1}{e}\right)^{x+1} - 3$,

(k) $y = e^{-x+2} - 1$,

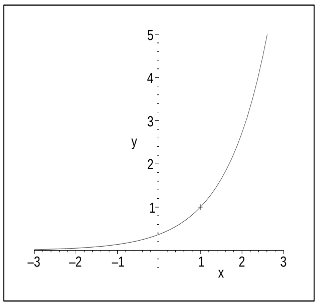
(l) $y = e^{x+3} - 2$.

3. Určete předpis a vlastnosti následujících funkcí:

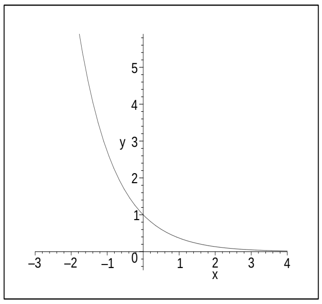
(a)



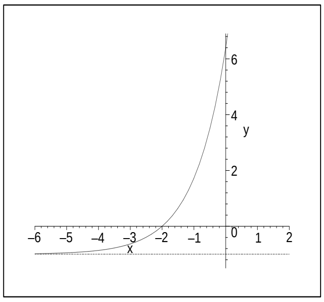
(b)



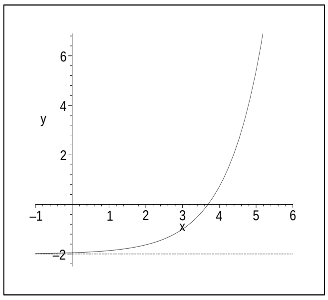
(c)



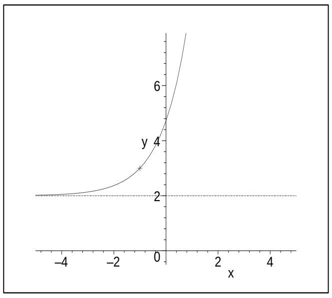
(d)



(e)

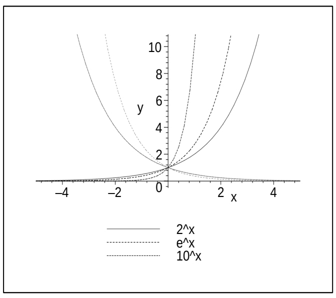


(f)

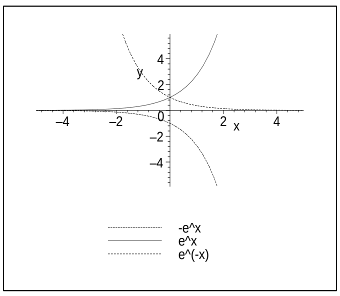


Výsledky:

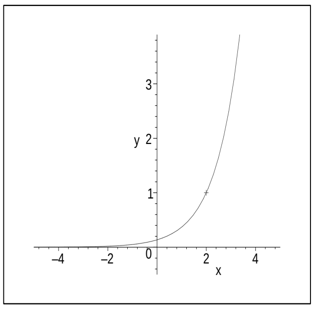
1a)



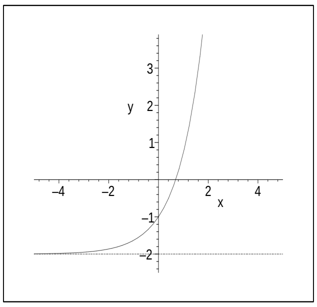
1b)



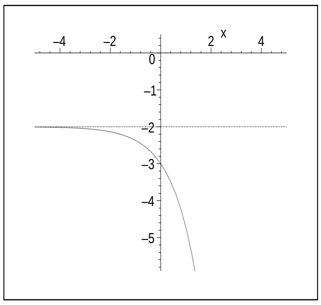
2a)



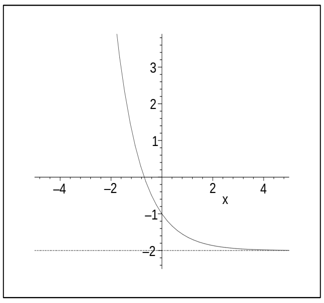
2b)



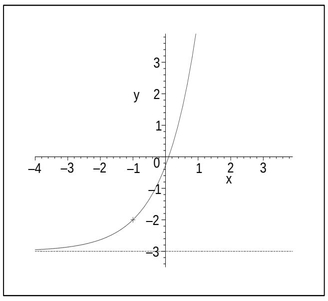
2c)



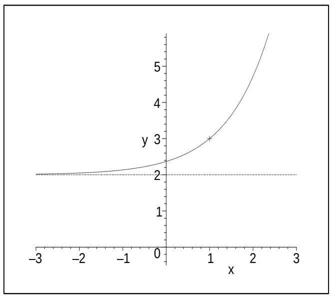
2d)



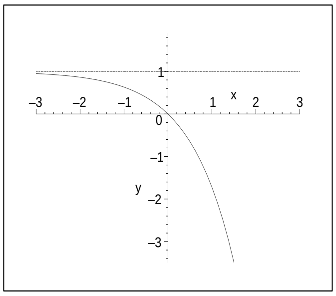
2e)



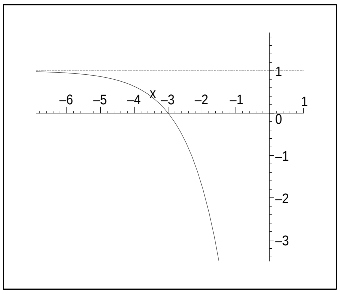
2f)



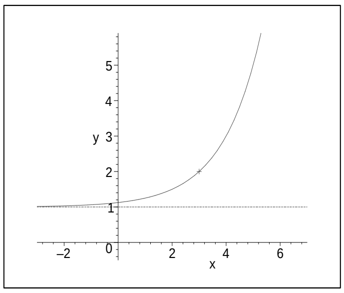
2g)



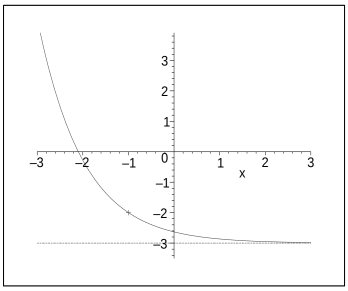
2h)



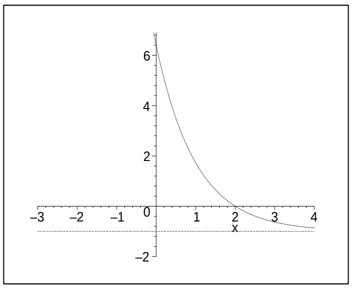
2i)



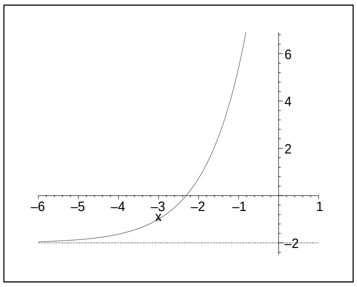
2j)



2k)



2l)



2. (a) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}^+$, *ani S ani L, R, P, om zdola č. 0, max nemá, min nemá, není period.,*

   (b) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = (-2; \infty)$, *ani S ani L, R, P, om zdola č.* -2, *max* *nemá, min nemá, není period.,*

(c) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = (-\infty; -2)$, *ani S ani L, K, P, om shora č.* -2, *max nemá, min nemá, není period.,*

(d) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = (-2; \infty)$, *ani S ani L, K, P, om zdola č.* -2, *max nemá, min nemá, není period.,*

(e) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = (-3; \infty)$, *ani S ani L, R, P, om zdola č.* -3, *max nemá, min nemá, není period.,*

(f) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = (2; \infty)$, *ani S ani L, R, P, om zdola č.* 2, *max nemá, min nemá, není period.,*

(g) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = (-\infty; 1)$, *ani S ani L, K, P, om shora č.* 1, *max nemá, min nemá, není period.,*

(h) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = (-\infty; 1)$, *ani S ani L, K, P, om shora č.* 1, *max nemá, min nemá, není period.,*

(i) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = (1; \infty)$, *ani S ani L, R, P, om zdola č.* 1, *max nemá, min nemá, není period.,*

(j) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = (-3; \infty)$, *ani S ani L, K, P, om zdola č.* -3, *max nemá, min nemá, není period.,*

(k) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = (-1; \infty)$, *ani S ani L, K, P, om zdola č.* -1, *max nemá, min nemá, není period.,*

(l) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = (-2; \infty)$, *ani S ani L, R, P, om zdola č.* -2, *max nemá, min nemá, není period..*

3. (a) $y = e^x - 1$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = (-1; \infty)$, *ani S ani L, R, P, om zdola č.* -1, *max nemá, min nemá, není period.,*

   (b) $y = e^{x-1}$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}^+$, *ani S ani L, R, P, om zdola č.* 0, *max nemá, min nemá, není period.,*

   (c) $y = e^{-x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}^+$, *ani S ani L, K, P, om zdola č.* 0, *max nemá, min nemá, není period.,*

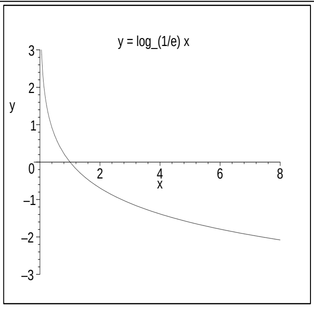
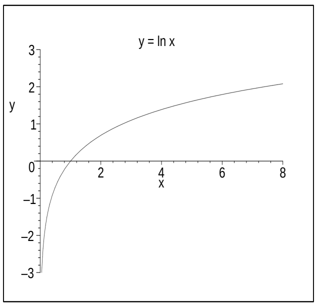
   (d) $y = e^{x+2} - 1$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = (-1; \infty)$, *ani S ani L, R, P, om zdola č.* -1, *max nemá, min nemá, není period.,*

   (e) $y = e^{x-3} - 2$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = (-2; \infty)$, *ani S ani L, R, P, om zdola č.* -2, *max nemá, min nemá, není period.,*

   (f) $y = e^{x+1} + 2$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = (2; \infty)$, *ani S ani L, R, P, om zdola č.* 2, *max nemá, min nemá, není period..*

1.7 Logaritmické funkce

Předpis: $\boxed{y = \log_a x}$; $a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$.
Graf: logaritmická křivka.

$a \in (0;1)$	$a > 1$
	
$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^+$	$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^+$
$\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$	$\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$
není sudá ani lichá	není sudá ani lichá
klesající	rostoucí
prostá	prostá
neomezená	neomezená
extrémy nemá	extrémy nemá
není periodická	není periodická

Příklady:

1. Do jednoho obrázku nakreslete všechny následující funkce:
   (a) $y = \log_2 x$, $y = \ln x$, $y = \log x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \log_{\frac{1}{e}} x$,
   (b) $y = \ln x$, $y = \ln(-x)$, $y = -\ln x$.

2. Nakreslete následující funkce a určete jejich vlastnosti:
   (a) $y = \ln(x-2)$,
   (b) $y = \ln x - 2$,
   (c) $y = -\ln x - 2$,
   (d) $y = \ln(-x) - 2$,
   (e) $y = \ln(x+1) - 3$,
   (f) $y = \ln(x-1) + 2$,

(g) $y = 1 - \ln x$,

(h) $y = 1 - \ln(x + 3)$,

(i) $y = \log_2(x - 3) + 1$,

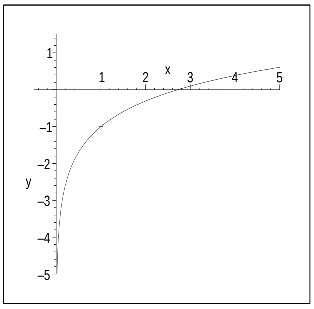
(j) $y = \ln(-x - 1) - 3$,

(k) $y = \log(-x + 2) - 1$,

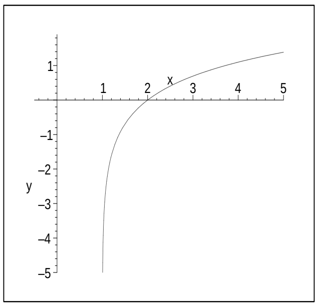
(l) $y = \log(x + 3) - 2$.

3. Určete předpis a vlastnosti následujících funkcí:

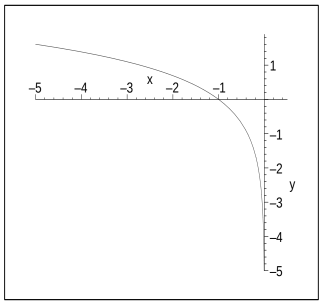
(a)



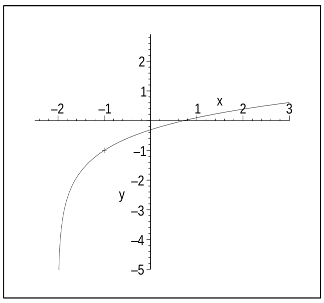
(b)



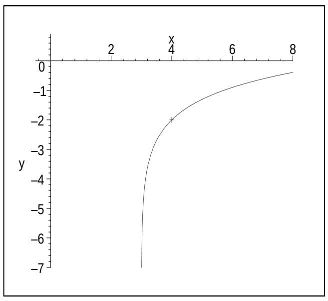
(c)



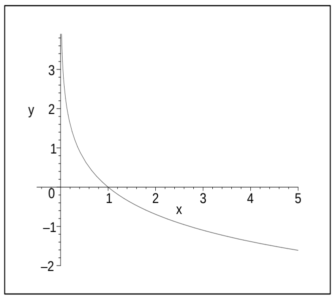
(d)



(e)

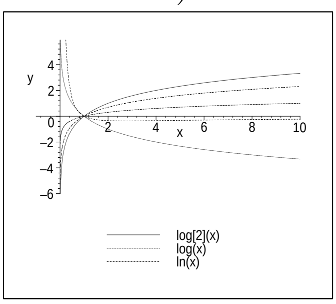


(f)

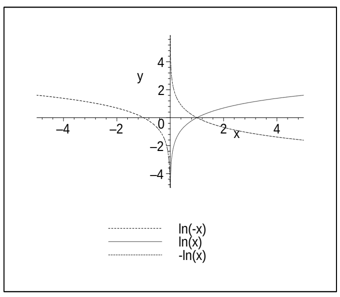


__**Výsledky:**__

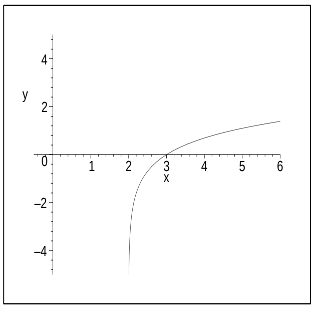
1a)



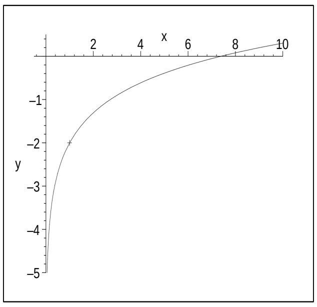
1b)



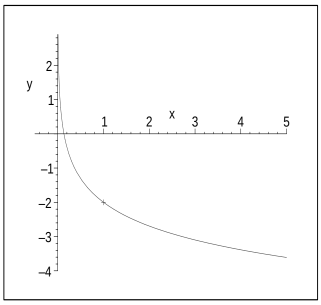
2a)



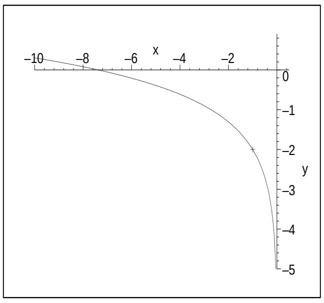
2b)



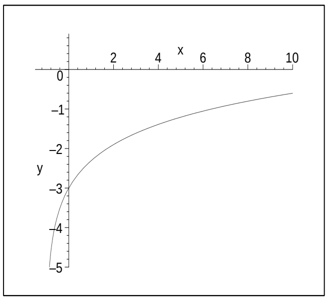
2c)



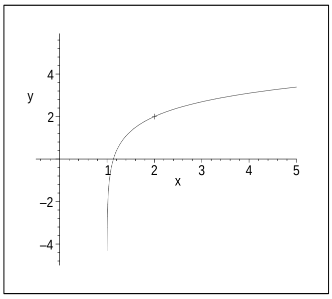
2d)



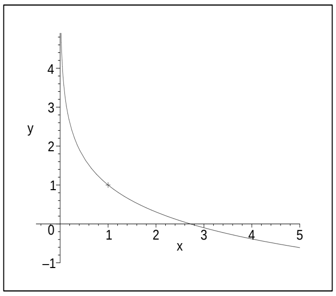
2e)



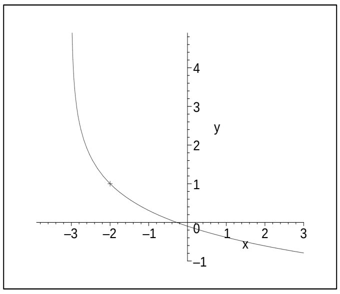
2f)



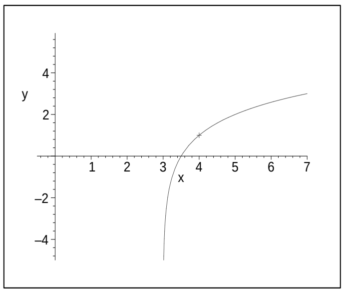
2g)



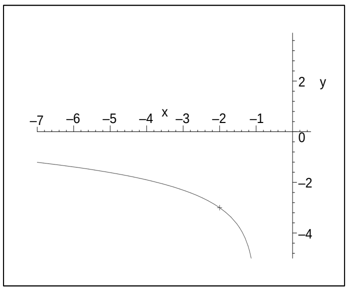
2h)



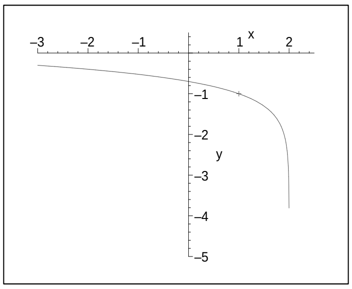
2i)



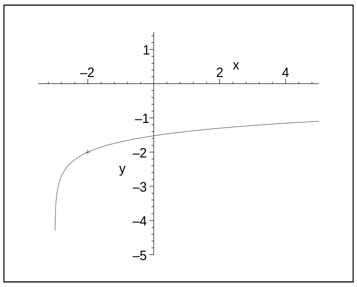
2j)



2k)



2l)



2. (a) $\mathcal{D}(f) = (2;\infty)$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *ani S ani L, R, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*

   (b) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^+$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *ani S ani L, R, P, neom, max nemá, min* *nemá, není period.,*

(c) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^+$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *ani S ani L, K, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*

(d) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^-$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *ani S ani L, K, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*

(e) $\mathcal{D}(f) = (-1; \infty)$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *ani S ani L, R, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*

(f) $\mathcal{D}(f) = (1; \infty)$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *ani S ani L, R, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*

(g) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^+$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *ani S ani L, K, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*

(h) $\mathcal{D}(f) = (-3; \infty)$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *ani S ani L, K, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*

(i) $\mathcal{D}(f) = (3; \infty)$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *ani S ani L, R, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*

(j) $\mathcal{D}(f) = (-\infty; -1)$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *ani S ani L, K, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*

(k) $\mathcal{D}(f) = (-\infty; 2)$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *ani S ani L, K, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*

(l) $\mathcal{D}(f) = (-3; \infty)$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *ani S ani L, R, P, neom, max nemá, min nemá, není period..*

3. (a) $y = \ln x - 1$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^+$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *ani S ani L, R, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*

(b) $y = \ln(x-1)$, $\mathcal{D}(f) = (1; \infty)$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *ani S ani L, R, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*

(c) $y = \ln(-x)$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^-$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *ani S ani L, K, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*

(d) $y = \ln(x+2) - 1$, $\mathcal{D}(f) = (-2; \infty)$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *ani S ani L, R, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*

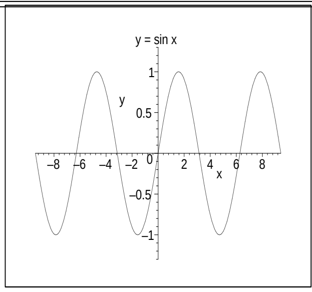
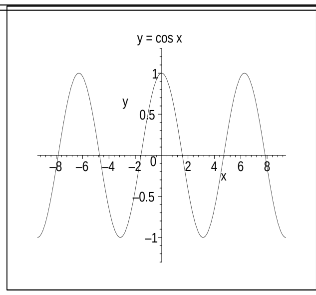
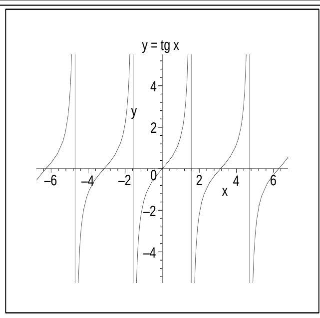
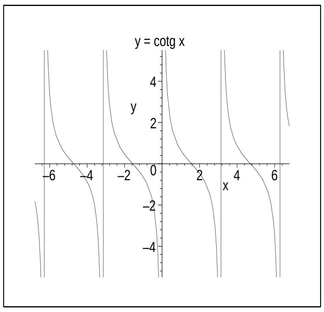
(e) $y = \ln(x-3) - 2$, $\mathcal{D}(f) = (3; \infty)$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *ani S ani L, R, P, neom, max nemá, min nemá, není period.,*

(f) $y = -\ln x = \log_{\frac{1}{e}} x$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^+$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *ani S ani L, K, P, neom, max nemá, min nemá, není period..*

1.8 Goniometrické funkce

Předpis: $\boxed{y = \sin x}$, $\boxed{y = \cos x}$, $\boxed{y = \operatorname{tg} x}$, $\boxed{y = \operatorname{cotg} x}$.
Graf: sinusoida, kosinusoida, tangentoida, kotangentoida.

!!! V této celé kapitole platí $\underline{\underline{k \in \mathbb{Z}}}$!!!

$y = \sin x$	$y = \cos x$
	
$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ $\mathcal{H}(f) = \langle -1; 1 \rangle$ lichá není rostoucí ani klesající není prostá omezená max v $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ min v $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ periodická: $p = 2\pi$	$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ $\mathcal{H}(f) = \langle -1; 1 \rangle$ sudá není rostoucí ani klesající není prostá omezená max v $2k\pi$ min v $\pi + 2k\pi$ periodická: $p = 2\pi$
$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{cotg} x$
	
$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$ lichá není rostoucí ani klesající není prostá neomezená extrémy nemá periodická: $p = \pi$	$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$ $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$ lichá není rostoucí ani klesající není prostá neomezená extrémy nemá periodická: $p = \pi$

Příklady:

1. Do jednoho obrázku nakreslete všechny následující funkce:

   (a) $y = \sin x$, $y = \sin 2x$,

   (b) $y = \cos x$, $y = 2\cos x$,

   (c) $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$,

   (d) $y = \sin x$, $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$,

   (e) $y = \cos x$, $y = \cos x + 2$,

   (f) $y = \operatorname{cotg} x$, $y = -\operatorname{cotg} x$.

2. Nakreslete následující funkce a určete jejich vlastnosti:

   (a) $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$,

   (b) $y = \cos x - 1$,

   (c) $y = -\sin x + 2$,

   (d) $y = \cos(x + \frac{\pi}{3})$,

   (e) $y = \sin(-x)$,

   (f) $y = \cos(x - \frac{3}{4}\pi) - 1$,

   (g) $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$,

   (h) $y = \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4})$,

   (i) $y = |\operatorname{cotg} x - 1|$,

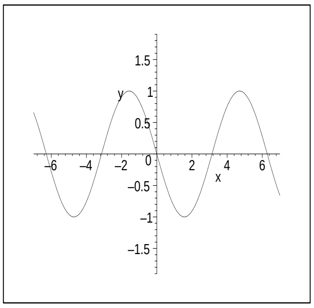
   (j) $y = \sin(x - \frac{2}{3}\pi) - 2$,

   (k) $y = 2\cos(x + \frac{5}{6}\pi)$,

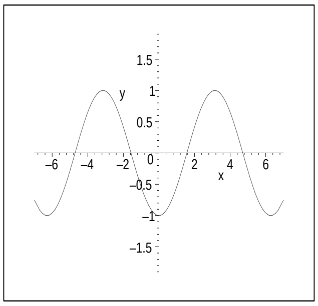
   (l) $y = 3\sin(x + \pi) - 1$.

3. Určete předpis a vlastnosti následujících funkcí:

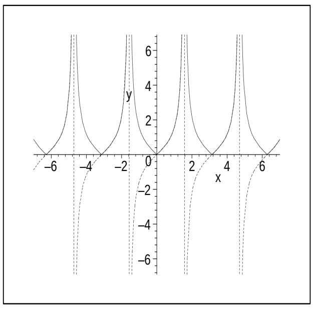
(a)



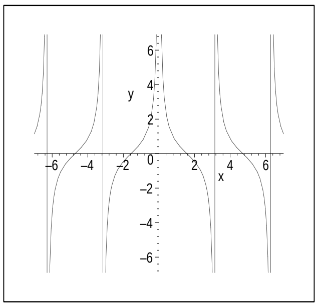
(b)



(c)

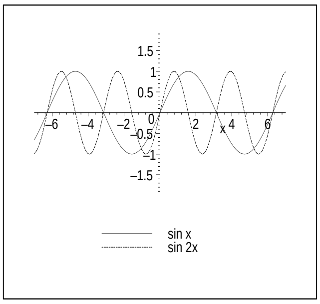


(d)

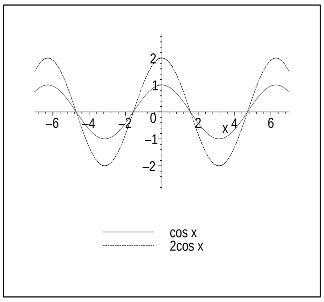


Výsledky:

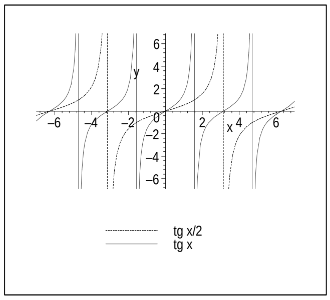
1a)



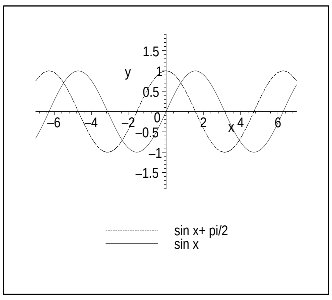
1b)



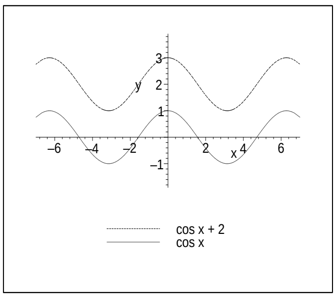
1c)



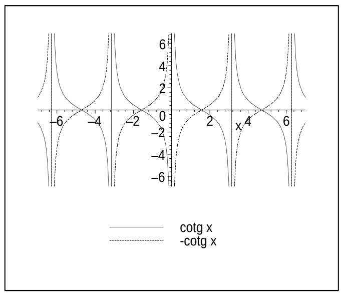
1d)



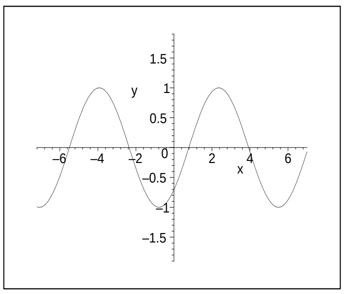
1e)



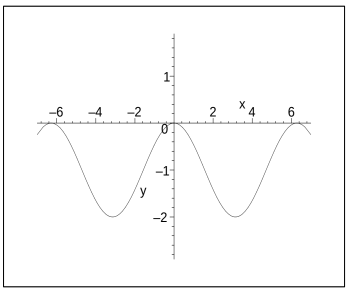
1f)



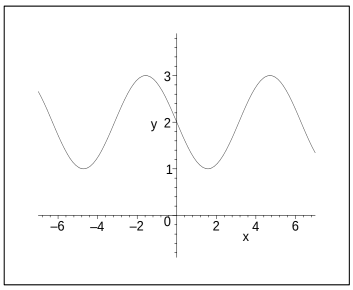
2a)



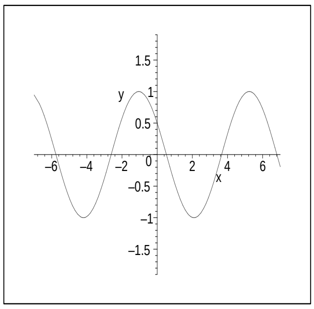
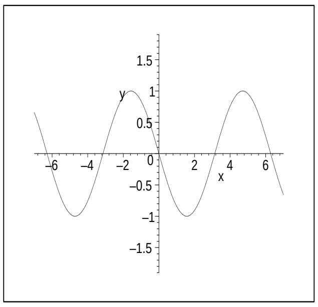
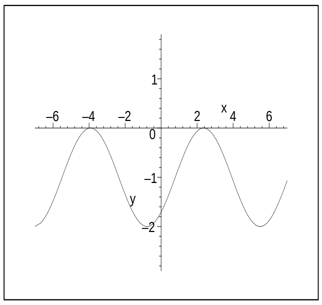
2b)



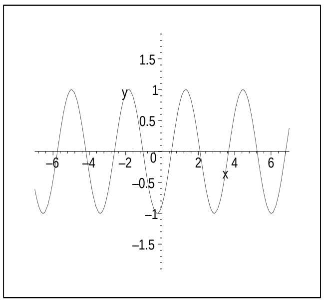
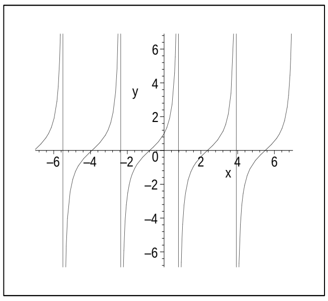
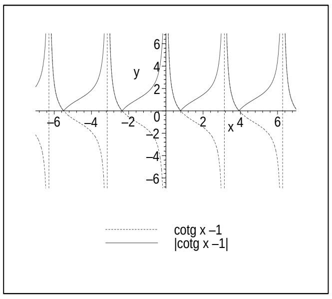
2c)



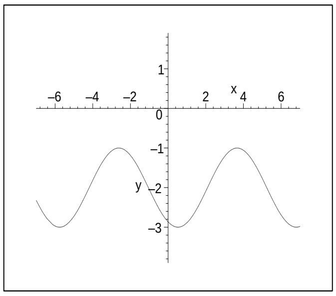
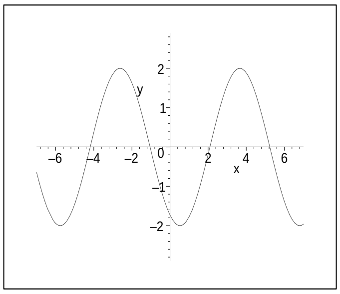
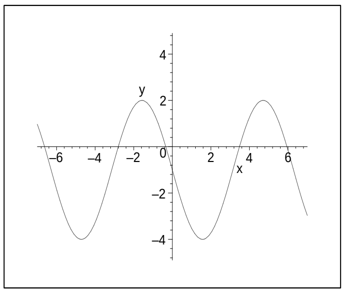
2d) 2e) 2f)

2g) 2h) 2i)

2j) 2k) 2l)

2. (a) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \langle -1; 1\rangle$, *ani S ani L, ani R ani K, není P, om č.* ± 1, *max* $[\frac{3}{4}\pi + 2k\pi; 1]$, *min* $[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi; -1]$, *period.* $p = 2\pi$,

   (b) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \langle -2; 0\rangle$, *S, ani R ani K, není P, om č.* $-2; 0$, *max* $[2k\pi; 0]$, *min* $[\pi + 2k\pi; -2]$, *period.* $p = 2\pi$,

   (c) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \langle 1; 3\rangle$, *ani S ani L, ani R ani K, není P, om č.* $1; 3$, *max* $[-\pi + 2k\pi; 3]$, *min* $[\pi + 2k\pi; 1]$, *period.* $p = 2\pi$,

   (d) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \langle -1; 1\rangle$, *ani S ani L, ani R ani K, není P, om č.* ± 1, *max* $[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; 1]$, *min* $[\frac{2}{3}\pi + 2k\pi; -1]$, *period.* $p = 2\pi$,

   (e) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \langle -1; 1\rangle$, *L, ani R ani K, není P, om č.* ± 1, *max* $[-\pi + 2k\pi; 1]$, *min* $[\pi + 2k\pi; -1]$, *period.* $p = 2\pi$,

   (f) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \langle -2; 0\rangle$, *ani S ani L, ani R ani K, není P, om č.* $-2; 0$, *max* $[\frac{3}{4}\pi + 2k\pi; 0]$, *min* $[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi; -2]$, *period.* $p = 2\pi$,

(g) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \langle -1; 1\rangle$, *ani S ani L, ani R ani K, není P, om č.* ± 1, *max* $[\frac{5}{12}\pi + k\pi; 1]$, *min* $[-\frac{\pi}{12} + k\pi; -1]$, *period.* $p = \pi$,

(h) $\mathcal{D}(f) = (-\frac{3}{4}\pi + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi)$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *ani S ani L, ani R ani K, není P, neom, max nemá, min nemá, period.* $p = \pi$,

(i) $\mathcal{D}(f) = (k\pi; \pi + k\pi)$, $\mathcal{H}(f) = \langle 0; \infty)$, *ani S ani L, ani R ani K, není P, om zdola č.* 0, *max nemá, min* $[\frac{\pi}{4} + k\pi; 0]$, *period.* $p = \pi$,

(j) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \langle -3; -1\rangle$, *ani S ani L, ani R ani K, není P, om č.* $-3; -1$, *max* $[\frac{7}{6}\pi + 2k\pi; -1]$, *min* $[\frac{\pi}{6} + 2k\pi; -3]$, *period.* $p = 2\pi$,

(k) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \langle -2; 2\rangle$, *ani S ani L, ani R ani K, není P, om č.* ± 2, *max* $[-\frac{5}{6}\pi + 2k\pi; 2]$, *min* $[\frac{\pi}{6} + 2k\pi; -2]$, *period.* $p = 2\pi$,

(l) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \langle -4; 2\rangle$, *ani S ani L, ani R ani K, není P, om č.* $-4; 2$, *max* $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; 2]$, *min* $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; -4]$, *period.* $p = 2\pi$.

3. (a) $y = -sinx = \sin(-x)$ nebo také $y = \sin(x + \pi) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \langle -1; 1\rangle$, *L, ani R ani K, není P, om č.* ± 1, *max* $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; 1]$, *min* $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; -1]$, *period.* $p = 2\pi$,

(b) $y = -\cos x$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \langle -1; 1\rangle$, *S, ani R ani K, není P, om č.* ± 1, *max* $[\pi + 2k\pi; 1]$, *min* $[2k\pi; -1]$, *period.* $p = 2\pi$,

(c) $y = |\operatorname{tg} x|$, $\mathcal{D}(f) = (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $\mathcal{H}(f) = \langle 0; \infty)$, *S, ani R ani K, není P, om zdola č.* 0, *max nemá, min* $[k\pi; 0]$, *period.* $p = \pi$,

(d) $y = \operatorname{cotg}|x|$, $\mathcal{D}(f) = (k\pi; \pi + k\pi)$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, *S, ani R ani K, není P, neom, max nemá, min nemá, není period..*